كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق
المقرر: منطق رياضي
المحاضرة : (9)

السنة : الرابعة اختصاص: تحليل وجبر
الفصل : الأول
التاريخ : 2013/11/10

توطئة :

1. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \equiv (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
2. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \equiv ((p \wedge q) \Rightarrow r)$

إن كلاً من الصيغتين الآتيتين استدلالٌ

3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \big((p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))\big)$
4. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \big((r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s))\big)$

$$\mathcal{L}_{13}: \forall x_i \, \big(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\big) \Rightarrow \big(\forall x_i \, \alpha(x_i) \Rightarrow \forall x_i \, \beta(x_i)\big)$$

البرهان :

حسب $\mathcal{L}_2$ نجد $\forall x_i \big(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\big) \Rightarrow \big(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\big)$

كما أنَّ $\big(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\big) \Rightarrow \big(\alpha(x_j) \Rightarrow \beta(x_j)\big)$

وحسب خاصية التعدي نجد

$$\underbrace{\forall x_i \big(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\big)}_{p} \Rightarrow \Big(\underbrace{\alpha(x_j)}_{q} \Rightarrow \underbrace{\beta(x_j)}_{r}\Big)$$

وباستخدام التكافؤ (1) الوارد في التوطئة السابقة نجد أن:

$$\underbrace{\alpha(x_j)}_{q} \Rightarrow \Big(\underbrace{\forall x_i \big(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\big)}_{p} \Rightarrow \underbrace{\beta(x_j)}_{r}\Big)$$

إن $\alpha(x_i) \Rightarrow \alpha(x_j)$ كما أنه من $\mathcal{L}_2$ نجد : $\forall x_i \, \alpha(x_i) \Rightarrow \alpha(x_i)$ وحسب التعدي: $\forall x_i \, \alpha(x_i) \Rightarrow \alpha(x_j)$

ومن جديد بتطبيق خاصية التعدي من أجل الاسنادية الأخيرة والاسنادية المكتوبة في السطر ما قبل السابق نجد

$$\underbrace{\forall x_i \, \alpha(x_i)}_{p} \Rightarrow \Big(\underbrace{\forall x_i \big(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\big)}_{q} \Rightarrow \underbrace{\beta(x_j)}_{r}\Big)$$

ومنه يكون $\underbrace{\Big(\forall x_i \, \alpha(x_i) \wedge \forall x_i \big(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\big)\Big)}_{p \wedge q} \Rightarrow \underbrace{\beta(x_j)}_{r}$ وذلك حسب التكافؤ (2) الوارد في التوطئة السابقة.

الآن حسب $\mathcal{R}_2$, وبحيث $\psi = \left(\forall x_i\, \alpha(x_i) \wedge \forall x_i\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right)\right)$ لا تحوي x_j كمتحول حر , نجد:

$$\psi \Rightarrow \forall x_j\, \beta(x_j)$$

وحسب $\mathcal{L}_3$ والتعدي نجد $\psi \Rightarrow \forall x_i\, \beta(x_i)$

أي: $\left(\forall x_i\, \alpha(x_i) \wedge \forall x_i\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right)\right) \Rightarrow \forall x_i\, \beta(x_i)$

والآن بالاستفادة من التكافؤ : $\left((p \wedge q) \Rightarrow r\right) \equiv \left(q \Rightarrow (p \Rightarrow r)\right)$ نجد:

$\forall x_i\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right) \Rightarrow \left(\forall x_i\, \alpha(x_i) \Rightarrow \forall x_i\, \beta(x_i)\right)$ وهو المطلوب.

$$\mathcal{L}_{14}: \forall x_i\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right) \Rightarrow \left(\exists x_i\, \alpha(x_i) \Rightarrow \exists x_i\, \beta(x_i)\right)$$

البرهان :

حسب $\mathcal{L}_2$ نجد $\forall x_i\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right) \Rightarrow \left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right)$

كما أنَّ $\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right) \Rightarrow \left(\alpha(x_j) \Rightarrow \beta(x_j)\right)$

وحسب خاصية التعدي نجد

$$\underbrace{\forall x_i\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right)}_{p} \Rightarrow \left(\underbrace{\alpha(x_j)}_{q} \Rightarrow \underbrace{\beta(x_j)}_{r}\right)$$

وحسب : $\left((p \wedge q) \Rightarrow r\right) \equiv \left(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\right)$ نجد

$$\left(\forall x_i\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right) \wedge \alpha(x_j)\right) \Rightarrow \beta(x_j)$$

وحسب $\mathcal{L}_1$ نجد $\beta(x_j) \Rightarrow \exists x_j\, \beta(x_j)$, ومن التعدي يكون :

$$\left(\forall x_i\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right) \wedge \alpha(x_j)\right) \Rightarrow \exists x_j\, \beta(x_j)$$

بالاستفادة من التكافؤ : $\left((p \wedge q) \Rightarrow r\right) \equiv \left(q \Rightarrow (p \Rightarrow r)\right)$ نجد:

$$\alpha(x_j) \Rightarrow \left(\forall x_i\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right) \Rightarrow \exists x_j\, \beta(x_j)\right)$$

الآن حسب $\mathcal{R}_1$, وبحيث $\psi = \left(\forall x_i\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right) \Rightarrow \exists x_j\, \beta(x_j)\right)$ لا تحوي x_j كمتحول حر , نجد:

$$\exists x_j\, \alpha(x_j) \Rightarrow \left(\forall x_i\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right) \Rightarrow \exists x_j\, \beta(x_j)\right)$$

وحسب $\left(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\right) \equiv \left(q \Rightarrow (p \Rightarrow r)\right)$

$$\forall x_i\left(\alpha(x_i) \Rightarrow \beta(x_i)\right) \Rightarrow \left(\exists x_j\, \alpha(x_j) \Rightarrow \exists x_j\, \beta(x_j)\right)$$

والآن بتطبيق $\mathcal{L}_4$ (تغيير الدليل) وخاصية التعدي نجد المطلوب.

$$\mathcal{L}_{15}: \forall x_i \left(\alpha(x_i) \wedge \beta(x_i)\right) \equiv \left(\forall x_i\, \alpha(x_i) \wedge \forall x_i\, \beta(x_i)\right)$$

من الممكن توزيع مكمم الشمول $\forall$على الوصل $\wedge$ وبالاتجاهين (تكافؤ).

يمكن كتابتها اختصاراً كما يلي : $\forall x_i\,(\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x_i\, \alpha \wedge \forall x_i\, \beta)$

البرهان :

برهان الاقتضاء الأول $\forall x_i\,(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\forall x_i\, \alpha \wedge \forall x_i\, \beta)$

لدينا $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$ صحيحة وضوحاً , وحسب $\mathcal{R}_3$ نجد أن $\forall x_i\,(\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha)$ صحيحة

وبحسب $\mathcal{L}_{13}$ نجد $\forall x_i\,(\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\forall x_i\,(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \forall x_i\, \alpha)$

وبتطبيق النزع نجد أن $\underbrace{\forall x_i\,(\alpha \wedge \beta)}_{p} \Rightarrow \underbrace{\forall x_i\, \alpha}_{q}$ صحيحة.

وبشكل مشابه نجد أن $\underbrace{\forall x_i\,(\alpha \wedge \beta)}_{p} \Rightarrow \underbrace{\forall x_i\, \beta}_{r}$ صحيحة.

والآن بالاستفادة من الاقتضاء $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \left((p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))\right)$ حيث p, q, r مُرمّزة أعلاه

وكون $(p \Rightarrow q)$ صحيحة , فبالنزع نجد $(p \Rightarrow r) \Rightarrow \left(p \Rightarrow (q \wedge r)\right)$ وأيضاً لكون $(p \Rightarrow r)$ صحيحة

فإننا بتطبيق النزع نجد أن$\left(p \Rightarrow (q \wedge r)\right)$ أي $\forall x_i\,(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\forall x_i\, \alpha \wedge \forall x_i\, \beta)$ وهو الاقتضاء المطلوب

برهان الاقتضاء المعاكس $(\forall x_i\, \alpha \wedge \forall x_i\, \beta) \Rightarrow \forall x_i\,(\alpha \wedge \beta)$

حسب $\mathcal{L}_2$ نجد $\underbrace{\forall x_i\, \alpha}_{p} \Rightarrow \underbrace{\alpha}_{q}$ و $\underbrace{\forall x_i\, \beta}_{r} \Rightarrow \underbrace{\beta}_{s}$

وبالاستفادة من الاقتضاء $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \left((r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s))\right)$ نجد :

$$(\forall x_i\, \alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \left((\forall x_i\, \beta \Rightarrow \beta) \Rightarrow \left((\forall x_i\, \alpha \wedge \forall x_i\, \beta) \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)\right)\right)$$

وبتطبيق النزع نجد : $(\forall x_i\, \beta \Rightarrow \beta) \Rightarrow \left((\forall x_i\, \alpha \wedge \forall x_i\, \beta) \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)\right)$.

وبتطبيق النزع مرة ثانية نجد $(\forall x_i\, \alpha \wedge \forall x_i\, \beta) \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)$

والآن حسب $\mathcal{R}_2$, وحيث $\psi = (\forall x_i\, \alpha \wedge \forall x_i\, \beta)$ لا تحوي x_i كمتحول حر , نجد:

$$(\forall x_i\, \alpha \wedge \forall x_i\, \beta) \Rightarrow \forall x_i\,(\alpha \wedge \beta)$$

مما سبق نستنتج أن

$$(\forall x_i\, \alpha \wedge \forall x_i\, \beta) \equiv \forall x_i\,(\alpha \wedge \beta)$$

.: انتهت المحاضرة التاسعة :.